

$$\int_a^\beta (x-a)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-a)^3 \quad \text{の証明}$$

$$\int_a^\beta (x-a)(x-\beta)dx$$

展開して

$$\int_a^\beta \{x^2 - (a+\beta)x + a\beta\}dx$$

積分して

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+\beta)}{2}x^2 + a\beta x \right]_a^\beta$$

計算して

$$\frac{\beta^3 - a^3}{3} - \frac{a+\beta}{2}(\beta^2 - a^2) + a\beta(\beta - a)$$

計算して
(6分の1で通分)

$$\frac{2\beta^3 - 2a^3}{6} - \frac{3a+3\beta}{6}(\beta^2 - a^2) + \frac{6a\beta(\beta - a)}{6}$$

分子を因数分解

$$\frac{2(\beta-a)(\beta^2 + \beta a + a^2)}{6}$$

ここを因数分解

$$(\beta+a)(\beta-a)$$

$\frac{\beta-a}{6}$ で因数分解

$$\frac{\beta-a}{6} \{ 2(\beta^2 + \beta a + a^2) - 3(a+\beta)^2 + 6a\beta \}$$

{ }の中を計算して

$$\frac{\beta-a}{6} (-\beta^2 + \beta a - a^2)$$

-を前に出して因数分解して

$$-\frac{1}{6}(\beta-a)^3 \quad \text{完了!!}$$

よって

$$\int_a^\beta (x-a)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-a)^3$$

となる