数学的帰納法

次の 2 ステップで示そう！

(1) n=1 の時に成り立つ　　(2) n=k の時に成り立つと仮定すると n=k+1 の時も成り立つ

例題）数学的帰納法によって次の式を証明しましょう。 $1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot n=\frac{1}{2}n(n+1)$

まずは手順①　n=1 の時に成り立つことを示す。

n=1 の時　左辺 =1　右辺= $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$

よって成り立つ。

次に手順②　n=k の時に成り立つと仮定する

$$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

この式が成り立つと仮定

n=k+1 の時左辺は

左辺　$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot k+(k+1)$ となる。

この式は成り立つと仮定しているので両辺に +(k+1) を加えると、

$$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

となり、右辺を計算すると、 $\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$

展開して　$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+k+1$

計算して　$\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k+1$

$\frac{1}{2}$ でくくって　$\frac{1}{2}(k^2+3k+2)$

カッコの中を因数分解する　$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$　右辺

となる。よって

$$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

となり、これはもとの式の n に k+1 を代入したもの

この式ね

$$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+4+\cdot\cdot\cdot\cdot k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)$$

と同じなるので、 n=k+1 の時も成り立つといえる。

したがってすべての自然数 n について成り立つといえる。