1のn乗根

nが自然数とする。　方程式 $Z^6=1$ をときましょう。

$Z^n=1$ のとき $|Z^n|=|1|$ よって $|Z|^n=1$ となる。$|Z|>0$ なので $|Z|=1$ となる。

$|Z|=1$ 絶対値が1となる数Zを極形式で表すと $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ となる。

$Z^6=1$ より $(\cos\theta+i\sin\theta)^6=1$ $\xrightarrow{\text{ド・モアブルの定理}}$ $\cos6\theta+i\sin6\theta=1+0i$ となるので

$\cos6\theta=1$　$\sin6\theta=0$ となる。ここで 6θ の範囲を考えると $(0\leqq\theta<2\pi)$ より $(0\leqq6\theta<12\pi)$

$\cos6\theta+i\sin6\theta=1+0i$ より $\cos6\theta=1$, $\sin6\theta=0$ になるものは

$6\theta=0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi$ ~~12π ・・・・・~~

$(0\leqq6\theta<12\pi)$ より ここは範囲外

$\theta=0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ となる。

これらを $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ に代入

$Z=\cos0+i\sin0$

$Z=\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi$

$Z=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$Z=\cos\pi+i\sin\pi$

$Z=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

$Z=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$

よって

解答

$Z=1$

$Z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z=-1$

$Z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$