

数列漸化式パターン別プリント

パターン6 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型

$$a_{n+1} = pa_n + q^n \quad (p \neq 0)$$

① (両辺を q^{n+1} で割る)

② (両辺を p^{n+1} で割る)

のどちらかのパターンで解く

問題

$$a_1 = 5 \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^{n+1}$$

で定められる一般項を求めましょう

解答

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^{n+1}$$

まず両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a_n}{5^n} + 2 \quad \text{となる。}$$

$$b_n = \frac{a_n}{5^n} \quad \text{とおくと、}$$

$$b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + 2 \quad \text{となる。}$$

この形は $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の解き方で

解くことにより

$$b_n = 5 - 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \quad \text{となる。}$$

よって

$$a_n = 5^n b_n \quad \text{となり、}$$

$$a_n = 5^{n+1} - 20 \cdot 3^{n-1} \quad \text{となる。}$$