数列漸化式パターン別プリント

パターン５　$a_{n+1} = pa_n +$（n の一次式）型

$$a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

※f(n) とは n 一次式

（パターン４の $pa_n + q$ の q の部分が n の一次式になる）

$$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n + f(n)\}$$

の形に変形して求める

問題

$a_1 = 2$　$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$

で定められる一般項を求めましょう

解答

n に n+1 を代入すると問題の式は

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2(n+1) + 1$　となる

これをもとの式である

$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$　と辺々を引くと

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) - 2$　となる。

$b_n = a_{n+1} - a_n$　とおくと上の式は

$b_{n+1} = 2b_n - 2$　となり　パターン４の解き方で

$b_{n+1} - 2 = 2(b_n - 2)$　となる。

これより

$b_n - 2$　は初項が－１公比が２の等比数列であるといえる。

$b_n - 2 = -1 \cdot 2^{n-1}$ となり。$b_n = -1 \cdot 2^{n-1} + 2$

となる。

$b_n = a_{n+1} - a_n$ となので b_n は a_n の階差数列なので

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　を計算して

$a_n = -2^{n-1} + 2n + 1$　（これは n=1 の時も成り立つ）