数列漸化式パターン別プリント

パターン３　階差数列型

$$a_{n+1} - a_n = f(n)$$ ※f(n) とは n の式

（f(n) が数列 $\{a_n\}$ の階差数列になる）

問題

$a_1 = 1$　$a_{n+1} = a_n + 4^n$

で定められる一般項を求めましょう

解答

$a_{n+1} - a_n = 4^n$ となり数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ が 4^n となる。階差数列の公式より $n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

よって $\frac{1}{3}(4^n-1)$ となる

パターン４　$a_{n+1} = pa_n + q$ 型

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

（$\alpha = p\alpha + q$ の利用）

問題

$a_1 = 3$　$a_{n+1} = 3a_n - 4$

で定められる一般項を求めましょう

解答

$a_{n+1} = 3a_n - 4$ を α を使った式で表すと

$\alpha = 3\alpha - 4$ となり、これを上の式と連立方程式にする

ことで、上の式は　$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ ・・・①

と変形できる。$a_n - 2$ を b_n とおくと①の式は

$b_{n+1} = 3b_n$ となる。これは等比が 3 の等比数列

であるので b_n の一般項は $b_n = 3^{n-1}$ となる。

よって $a_n - 2 = 3^{n-1}$ となり $a_n = 3^{n-1} + 2$ となる。