

ユークリッドの互除法

$19x+26y=1$ をみたす整数 x, y の組を 1 つ求めよ

まずは x と y の係数に注目して以下の形にする。

あまりの部分 = の形にする

$$26 = 19 \cdot 1 + 7 \quad \longrightarrow \quad 7 = 26 - 19 \cdot 1 \quad \text{①}$$

あま
り

かけるいくつになるか考える

$$19 = 7 \cdot 2 + 5 \quad \longrightarrow \quad 5 = 19 - 7 \cdot 2 \quad \text{②}$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2 \quad \longrightarrow \quad 2 = 7 - 5 \cdot 1 \quad \text{③}$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad \longrightarrow \quad 1 = 5 - 2 \cdot 2 \quad \text{④}$$

ここが1になったらおしまい

以下も同様に

④の式からスタート

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

この2に③の式を代入

$$2 = 7 - 5 \cdot 1$$

$$1 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$$

分配法則で2をそれぞれにかける

$$1 = 5 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$$

$5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3$ なので

$$1 = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 \quad \text{となる}$$

次はこの5に②の式を代入

$$5 = 19 - 7 \cdot 2 \quad \text{②}$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$1 = (19 - 7 \cdot 2) \cdot 3 - 7 \cdot 2$$

分配法則で3をそれぞれにかける

$$1 = 19 \cdot 3 - 7 \cdot 6 - 7 \cdot 2$$

$-7 \cdot 6 - 7 \cdot 2$ は $-7 \cdot 8$ になるので

$$1 = 19 \cdot 3 - 7 \cdot 8 \quad \text{となる}$$

次はこの7に①の式を代入

$$7 = 26 - 19 \cdot 1 \quad \text{①}$$

分配法則で8をそれぞれにかける

$$1 = 19 \cdot 3 - (26 - 19 \cdot 1) \cdot 8$$

$$1 = 19 \cdot 3 - 26 \cdot 8 + 19 \cdot 8$$

$19 \cdot 3 + 19 \cdot 8$ は $19 \cdot 11$ になるので

$$1 = 19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8)$$

$-26 \cdot 8$ を $26 \cdot (-8)$ の形にする

これにより

$$1 = 19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) \quad \text{つまり}$$

$$19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) = 1 \quad \text{の式が得られる}$$

よって $19x+26y=1$ をみたす整数 x, y の組

の 1 つが $x=11 \quad y=-8$ というのがわかる。